

Họ tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

Câu 1 (2.5 điểm).

(a) Giả sử  $a, b$  là các số thực thoả mãn: với  $x, y$  là hai số thực bất kì ta luôn có

$$|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2.$$

Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 \leq 2$ .

(b) Giải phương trình

$$x + 4 = \sqrt{5 - x} + \sqrt{2 - x} + \sqrt{(5 - x)(2 - x)}.$$

Câu 2 (1,5 điểm). Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thoả mãn  $a \neq c$  và

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = 2.$$

Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

Câu 3 (3 điểm). Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , có  $AB < AC$ . Trên đường tròn  $(O)$  lấy điểm  $M$  khác  $A$  sao cho  $AM \parallel BC$ . Vẽ đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với  $AO$  tại  $A$ , và đi qua  $M$ . Đường tròn  $(K)$  cắt các đường thẳng  $AB, AC$  tại các điểm thứ hai  $F, E$  ( $F, E$  khác  $A$ ). Các đường thẳng  $OM, BC$  cắt nhau tại điểm  $D$ .

(a) Chứng minh rằng các điểm  $D, E, F$  thẳng hàng.

(b) Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Các đường thẳng  $AO$  và  $DE$  cắt nhau tại điểm  $L$ . Chứng minh rằng  $AHDL$  là hình bình hành.

Câu 4 (3 điểm).

(a) Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q, r$  sao cho  $pq - 6, qr + 1, rp + 10$  là các số chính phương.

(b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

.....HẾT.....