UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
Năm học 2023 - 2024
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I (*5,0 điểm*).

1. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) các điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2024}\left(5^{2x}-5^{x}+1\right)\left(x^2-2x\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có đúng ba điểm cực trị x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$.

Câu II (*4,0 điểm*).

1. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$ và $x+y>0;\ x\in[-2024;2024]$?

2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{x+x\sqrt{1+x^2}}=2\log_3\dfrac{1}{9}\cdot\log_9(2y)\\ 2024^{2x(1-y)}+1=2x\left(1+\sqrt{2y^2-2y+1}\right).\end{cases}$

Câu III (*2,0 điểm*). Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+x\cos x\left(4+2\sin 2x+x\cos 2x\right)}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x.$

Câu IV (*5,0 điểm*).

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=15$, $BC=AB=5$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh SD và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{AI}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng SI và AM.

a) Tính thể tích khối tứ diện $CDMI$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC.

b) Tính thể tích khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp ΔEFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, ΔABC vuông tại A, $AB=2AC$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EC'}=-2\overrightarrow{EC}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng 12. Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt phẳng (ABC). Tìm $\cos\alpha$ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu V (*2,0 điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(-9;1;-4)$, $C(-9;7;4)$. Trong các ΔABC thỏa mãn điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy), các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và C vuông góc với nhau sao cho góc A lớn nhất. Viết phương trình mặt cầu đường kính OA với O là gốc tọa độ.

Câu VI (*2,0 điểm*). Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+1\le 2x+3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3+x^2+36}{2(x+1)}+\dfrac{y^3+y^2+36}{4(y+1)}+\dfrac{2z^3+z^2+9}{2z+1}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:..
Người coi thi số 1:.. Người coi thi số 2:..

UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

(Hướng dẫn chấm thi có 08 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
Năm học 2023 - 2024

Môn: Toán

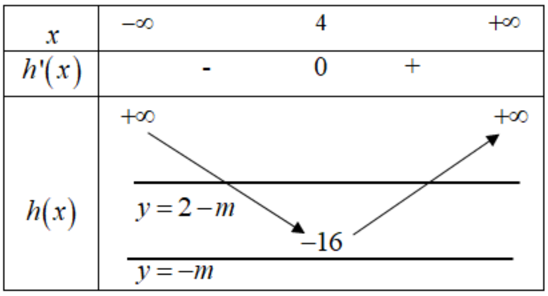
HƯỚNG DẪN CHẤM – CHÍNH THỨC

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

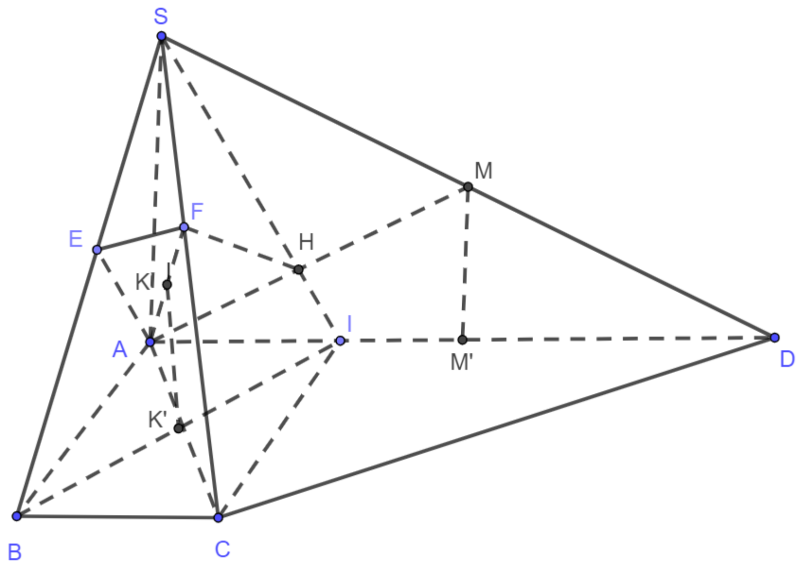
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	1. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) các điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.	**2,5**
	Ta có $y=1-\dfrac{4}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}$, $x\neq -1$. Gọi $M\left(a;1-\dfrac{4}{a+1}\right), a\neq -1$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $d: y=\dfrac{4}{(a+1)^2}(x-a)+1-\dfrac{4}{a+1}$.	0,25
	Gọi A và B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang; I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=1\Rightarrow I(-1;1)$.	0,25
	Giao điểm của d và tiệm cận đứng là $A\left(-1;1-\dfrac{8}{a+1}\right)$.	0,25
	Giao điểm của d và tiệm cận ngang là $B(2a+1;1)$.	0,25
	Suy ra $IA=\dfrac{8}{\lvert a+1\rvert}$, $IB=2\lvert a+1\rvert$, $AB=\sqrt{4(a+1)^2+\dfrac{64}{(a+1)^2}}$.	0,25
I **(5,0 điểm)**	Vì ΔIAB vuông tại I nên $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB=8$.	0,25
	Nửa chu vi của ΔIAB là $p=\dfrac{IA+IB+AB}{2}=\dfrac{4}{\lvert a+1\rvert}+\lvert a+1\rvert+\sqrt{(a+1)^2+\dfrac{16}{(a+1)^2}}$ Bán kính đường tròn nội tiếp ΔIAB là $r=\dfrac{S_{\Delta IAB}}{p}$ nên r lớn nhất khi p nhỏ nhất.	0,25
	Áp dụng bất đẳng AM-GM ta có $\dfrac{4}{\lvert a+1\rvert}+\lvert a+1\rvert+\sqrt{(a+1)^2+\dfrac{16}{(a+1)^2}}\geq 2\sqrt{\dfrac{4}{\lvert a+1\rvert}\cdot\lvert a+1\rvert}+\sqrt{2\cdot\sqrt{(a+1)^2\cdot\dfrac{16}{(a+1)^2}}}=4+2\sqrt{2}$ Suy ra $p\geq 4+2\sqrt{2}$.	0,25
	p đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $\dfrac{4}{\lvert a+1\rvert}=\lvert a+1\rvert\Leftrightarrow(a+1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-3.\end{array}\right.$	0,25
	Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1;-1), M(-3;3)$.	0,25
	2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-3)^{2024}\left(5^{2x}-5^x+1\right)\left(x^2-2x\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có đúng ba điểm cực trị x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=50$.	**2,5**

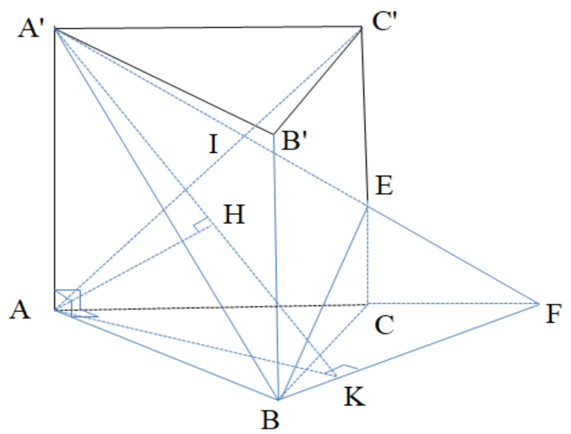
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Ta có $g'(x)=(2x-8)f'(x^2-8x+m)$ $=(2x-8)(x^2-8x+m-3)^{2024}\left(5^{2x^2-16x+2m}-5^{x^2-8x+m}+1\right)\left[(x^2-8x+m)^2-2(x^2-8x+m)\right]$	0,25
	Vì $(x^2-8x+m-3)^{2024}\geq 0;\ 5^{2x^2-16x+2m}-5^{x^2-8x+m}+1>0$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $(2x-8)\left[(x^2-8x+m)^2-2(x^2-8x+m)\right]$.	0,25
	Ta có $(2x-8)\left[(x^2-8x+m)^2-2(x^2-8x+m)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m=0\\x^2-8x+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x=-m\\x^2-8x=2-m.\end{array}\right.$	0,25
	Xét hàm số $h(x)=x^2-8x$ trên $\mathbb{R}$, có $h'(x)=2x-8; h'(x)=0\Leftrightarrow x=4$. Bảng biến thiên 	0,25
	Hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ. Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-m\leq -16<2-m\Leftrightarrow 16\leq m<18$.	0,5
	Giả sử $x_3=4$ thì x_1,x_2 là hai nghiệm của $x^2-8x=2-m$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=34$.	0,25
	Ta có $x^2-8x=2-m\Leftrightarrow x^2-8x+m-2=0$. Định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_1x_2=m-2.\end{cases}$	0,25
	Khi đó $x_1^2+x_2^2=34\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=34\Leftrightarrow 64-2(m-2)=34\Leftrightarrow m=17$.	0,25
	Đối chiếu điều kiện suy ra $m=17$ thỏa mãn bài.	0,25
II **(5,0 điểm)**	**1.** Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$ và $x+y>0;\ x\in[-2024;2024]$?	**2,0**
	Điều kiện: $x+2y>0$. Ta có: $x+y>0$ nên $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$ $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{(x+y)(x+2y)}{x+y}+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)-\log_2(x+y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$ $\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)+x^2+2y^2+3xy=\log_2(x+y)+x+y.\ (1)$	0,25
	Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t;\ t>0$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0, t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.	0,25
	Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x^2+2y^2+3xy)=f(x+y)\Leftrightarrow x^2+2y^2+3xy=x+y$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1)=0\Leftrightarrow x=1-2y$.	0,25
	Vì $x+y>0$ nên $x+y=1-y>0\Rightarrow y<1$ Do $-2024\leq x\leq 2024$ suy ra $-2024\leq 1-2y\leq 2024\Leftrightarrow -1011,5\leq y\leq 1012,5$.	0,25

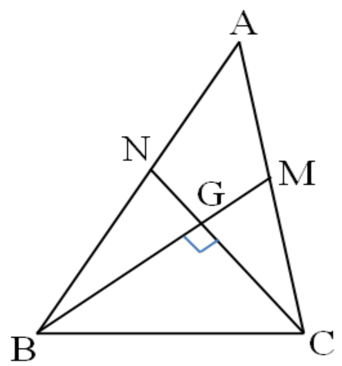
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Suy ra $-1011,5\le y<1$. Mặt khác $y\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $y\in\{-1011;-1010;\ldots;-1;0\}$.	0,25
	Với mỗi giá trị của y cho ta 1 giá trị của x thoả mãn bài. Vậy có 1012 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.	0,25
	2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực: $$\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{x+x\sqrt{1+x^2}}=2\log_3\dfrac{1}{9}\cdot\log_9(2y)\ (1)\\ 2024^{2x(1-y)}+1=2x\left(1+\sqrt{2y^2-2y+1}\right)\quad(2)\end{cases}$$	**2,0**
	Điều kiện: $x>0,y>0$. Ta có $(1)\Leftrightarrow\log_3\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{x+x\sqrt{1+x^2}}=2\log_3(2y)$ $\Leftrightarrow\log_3\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{x+x\sqrt{1+x^2}}=\log_3(4y^2)\Leftrightarrow\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{x+x\sqrt{1+x^2}}=4y^2$	0,25
	$\Leftrightarrow\dfrac{2y+\sqrt{1+4y^2}}{4y^2}=x+x\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{2y}\sqrt{\dfrac{1}{4y^2}+1}=x+x\sqrt{1+x^2}$ (3)	0,25
	Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t^2}$, $t>0$. Ta có $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0,\ \forall t>0$. $\Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó $(3)\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2y}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2x}$.	0,25
	$(2)\Leftrightarrow 2024^{2x-1}+1=2x\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+1}\right)$ $\Leftrightarrow 2024^{2x-1}+1=2x+\sqrt{2-4x+4x^2}$ $\Leftrightarrow 2024^{2x-1}=2x-1+\sqrt{(2x-1)^2+1}$ (4)	0,25
	Đặt $a=2x-1$, phương trình (4) trở thành $2024^a=a+\sqrt{a^2+1}\Leftrightarrow\ln(2024^a)=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-a\ln2024=0$	0,25
	Xét hàm số $g(a)=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-a\ln2024,\ a\in\mathbb{R}$. Ta có $g'(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\ln2024<0,\forall\in\mathbb{R}$ vì $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\le1;\ \ln2024>1$. Suy ra hàm số $g(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.	0,25
	Mà $g(0)=0$, do đó phương trình $g(a)=0$ có nghiệm duy nhất $a=0$. Với $a=0$ thì $2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=1$ (thỏa mãn).	0,25
	Hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.	0,25
III (2,0 điểm)	Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+x\cos x(4+2\sin2x+x\cos2x)}{\cos x\sqrt{2+\sin2x}}\mathrm{d}x$.	**2,0**

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x\left(4+2\sin 2x\right)+x^2\cos x\cos 2x}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x$ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x\sqrt{2+\sin 2x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\cos 2x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=A+B+C.$	0,25
	$B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2x\sqrt{2+\sin 2x}\mathrm{d}x.$ Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2+\sin 2x}\\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x\\ v=x^2\end{cases}$ $B=x^2\cdot\sqrt{2+\sin 2x}\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\cos 2x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}-C$ với $C=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\cos 2x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x.$	0,25
	$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{2\tan x+2(1+\tan^2 x)}}$ $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\cos^2 x\sqrt{\left(\tan x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$	0,25
	Đặt $t=\tan x+\frac{1}{2}\Rightarrow\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Suy ra $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}.$	0,25
	Đặt $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u\Rightarrow\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$, $u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$ $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$	0,25
	$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\sin^2 u}\mathrm{d}\left(\sin u\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin u}+\frac{1}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}\left(\sin u\right)$	0,25
	$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right\|\Big\|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{7+4\sqrt{3}}{3}.$	0,25
	Vậy $I=A+B+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{7+4\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}.$	0,25
IV (5,0 điểm)	**1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp\left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=15$, $BC=AB=5$. Góc giữa mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh SD và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{AI}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng SI và AM. a) Tính thể tích khối tứ diện $CDMI$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SC. b) Tính thể tích khối nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp ΔEFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.	**2,5**

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.
Xét tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^0 = 5\sqrt{3}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Gọi M' là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Trong tam giác SAD, có $\begin{cases} SA // MM' \\ MS = MD \end{cases} \Rightarrow MM' = \frac{1}{2}SA = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>ΔCDI vuông tại $I \Rightarrow S_{\Delta CDI} = \frac{1}{2}CI \cdot DI = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Vậy thể tích khối tứ diện $CDMI$ là $V_{CDMI} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta CDI} \cdot MM' = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{125\sqrt{3}}{6}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có: $CI \perp (SAD) \Rightarrow CI \perp AM$ (1).
Trong tam giác vuông SAD, có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{75 + 225} = 10\sqrt{3}$.
Suy ra $SM = AM = SA = 5\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^0$; $\tan \widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASI} = 30^o$.
$\Rightarrow \widehat{SHA} = 90^0$ (H là giao điểm của SI và AM). Do đó $SI \perp AM$ (2).</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (SIC) \Rightarrow AM \perp HF$.
Ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$; $AE \perp EF$ (3)
$AM \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp (SIC) \Rightarrow AH \perp SC$; $AH \perp HF$ (4).
Mặt khác $AF \perp SC$ (5).
Từ $(3),(4),(5)$ suy ra bốn điểm A, E, F, H đồng phẳng và $SC \perp (AEFH)$
Suy ra $SC \perp HF$ mà $AM \perp HF \Rightarrow \mathrm{d}(AM;SC) = HF$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{5}$.
Ta có $SF \cdot SC = SA^2 \Leftrightarrow SF = \frac{SA^2}{SC} = \frac{\left(5\sqrt{3}\right)^2}{5\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.
Tam giác SAI vuông tại $A \Rightarrow SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2} = 10$.
Vì ΔSHF đồng dạng ΔSCI nên $\frac{HF}{CI} = \frac{SF}{SI} \Leftrightarrow HF = \frac{SF \cdot CI}{SI} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 5}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(AM;SC) = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	b) Từ $(3),(4) \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AHF} = 90^0$ hay tứ giác $AEFH$ nội tiếp đường tròn đường kính AF. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH là trung điểm K của đoạn AF. Gọi K' là trung điểm của đoạn AC.	0,25
	Vì $KK' // FC$ và $SC \perp (AEFH)$ nên $KK' \perp (EFH)$ hay K' là đỉnh hình nón. Trong ΔSAC, có $AF \cdot SC = SA \cdot AC \Leftrightarrow AF = \dfrac{SA \cdot AC}{SC} = \dfrac{5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} = \sqrt{30}.$ Suy ra $KF = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$; $FC = SC - SF = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \Rightarrow KK' = \dfrac{1}{2}FC = \sqrt{5}.$	0,25
	Thể tích khối nón cần tìm là $V' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot KF^2 \cdot KK' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = \dfrac{5\pi\sqrt{5}}{2}.$	0,25
	2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, ΔABC vuông tại A, $AB = 2AC$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EC'} = -2\overrightarrow{EC}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng 12. Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt phẳng (ABC). Tìm $\cos\alpha$ để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất.	**2,5**
	 Gọi I, F lần lượt là giao điểm của $A'E$ với AC' và AC. Ta có $\dfrac{d(C',(A'BE))}{d(A,(A'BE))} = \dfrac{IC'}{IA} = \dfrac{C'E}{AA'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d(A,(A'BE)) = \dfrac{3}{2}d(C',(A'BE)) = 18.$	0,25
	Kẻ $AK \perp BF$ tại K và $AH \perp A'K$ tại H. Vì $BF \perp (A'AK)$ nên góc giữa $(A'BE)$ và (ABC) là $\widehat{A'KA} \Rightarrow \widehat{A'KA} = \alpha.$	0,25
	Ta có $AH \perp A'K$ và $AH \perp BF$ nên $AH \perp (A'BF) \Rightarrow d(A;(A'BE)) = AH = 18.$	0,25
	Đặt $AC = x > 0 \Rightarrow AB = 2x.$ Vì $CE \parallel AA' \Rightarrow \dfrac{EC}{AA'} = \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{3}{2}AC = \dfrac{3x}{2}.$ Xét tam giác ABF vuông tại $A \Rightarrow BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{(2x)^2 + \left(\dfrac{3x}{2}\right)^2} = \dfrac{5x}{2}.$ Mặt khác $AK \cdot BF = AB \cdot AF \Leftrightarrow AK = \dfrac{AB \cdot AF}{BF} = \dfrac{6x}{5}.$	0,25
	Xét ΔAHK vuông tại $H \Rightarrow AH = AK \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \dfrac{6x}{5} \cdot \sin\alpha = 18 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{\sin\alpha}.$ Xét $\Delta AA'K$ vuông tại $A \Rightarrow A'A = AK \cdot \tan\alpha = \dfrac{6x}{5} \cdot \tan\alpha = \dfrac{18}{\cos\alpha}.$	0,25
	Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = x^2 = \dfrac{225}{\sin^2\alpha}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\Delta ABC} \cdot A'A = \dfrac{225}{\sin^2\alpha} \cdot \dfrac{18}{\cos\alpha} = \dfrac{4050}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}.$	0,25

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Đặt $t=\cos\alpha\in(0;1)$. Xét hàm số $f(t)=t(1-t^2)=-t^3+t;t\in(0;1)$.
Suy ra $f'(t)=-3t^2+1;f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ vì $t\in(0;1)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table>
Suy ra $f(t)\le\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V\ge\dfrac{18225\sqrt{3}}{3}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Thể tích khối lăng trụ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{18225\sqrt{3}}{3}$ khi $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="6">V
(2,0 điểm)</td><td>Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(-9;1;-4)$, $C(-9;7;4)$. Trong các ΔABC thỏa mãn điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy), các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B và C vuông góc với nhau sao cho góc A lớn nhất. Viết phương trình mặt cầu đường kính OA với O là gốc tọa độ.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB và $G=BM\cap CN$.
Ta có $BM\perp CN$ nên $BC^2=BG^2+GC^2$.
Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có
$BG^2=\left(\dfrac{2}{3}BM\right)^2=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{2(BA^2+BC^2)-AC^2}{4};CG^2=\left(\dfrac{2}{3}CN\right)^2=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{2(CA^2+CB^2)-AB^2}{4}$
$\Rightarrow BC^2=\dfrac{AB^2+AC^2+4BC^2}{9}\Rightarrow AB^2+AC^2=5BC^2$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Góc A lớn nhất $\Leftrightarrow\cos A$ nhỏ nhất.
Mà $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\dfrac{5(AB^2+AC^2)-(AB^2+AC^2)}{10AB.AC}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}\ge\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2AB\cdot AC}{AB\cdot AC}=\dfrac{4}{5}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB=AC$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vì $A\in(Oxy)$ nên $A(a;b;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-9-a;1-b;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-9-a;7-b;4)$
Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;6;8)\Rightarrow BC^2=0^2+6^2+8^2=100$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Do $AB = AC$ nên $(-9-a)^2+(1-b)^2+(-4)^2=(-9-a)^2+(7-b)^2+4^2 \Leftrightarrow b=4.$	0,25
	Do $AB^2+AC^2=5BC^2$ và $AB=AC$ nên $2AB^2=5BC^2$ $\Leftrightarrow 2\left[(-9-a)^2+(1-b)^2+(-4)^2\right]=500$ $\Leftrightarrow (-9-a)^2+9+16=250 \Leftrightarrow (a+9)^2=225 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-24. \end{array}\right.$	0,25
	* Với $a=6 \Rightarrow A(6;4;0)$, I là trung điểm $OA \Rightarrow I(3;2;0) \Rightarrow OI=\sqrt{13}.$ Mặt cầu đường kính OA có phương trình là $(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=13.$	0,25
	* Với $a=-24 \Rightarrow A(-24;4;0)$, K là trung điểm $OA \Rightarrow K(-12;2;0) \Rightarrow OK=\sqrt{148}.$ Mặt cầu đường kính OA có phương trình là $(x+12)^2+(y-2)^2+z^2=148.$	0,25
VI (2,0 điểm)	Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+1 \le 2x+3y.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3+x^2+36}{2(x+1)}+\dfrac{y^3+y^2+36}{4(y+1)}+\dfrac{2z^3+z^2+9}{2z+1}.$	**2,0**
	Ta có $P=\dfrac{18}{x+1}+\dfrac{9}{y+1}+\dfrac{9}{2z+1}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=9\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{2z+1}\right)+\dfrac{1}{4}\left(2x^2+y^2+4z^2\right)$	0,25
	Ta có $2x+3y \ge x^2+y^2+z^2+1=(x^2+4)+(y^2+4)+(z^2+1)-8 \ge 4x+4y+2z-8.$ Suy ra $0<2x+y+2z \le 8.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ với $a,b>0$, ta có $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{2z+1}=\dfrac{4}{2x+2}+\left(\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{2z+1}\right) \ge \dfrac{4}{2x+2}+\dfrac{4}{y+2z+2} \ge \dfrac{16}{2x+y+2z+4}$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2) \ge (am+bn+cp)^2$. Ta có $(2+1+1)(2x^2+y^2+4z^2) \ge (2x+y+2z)^2$. Suy ra $2x^2+y^2+4z^2 \ge \dfrac{1}{4}(2x+y+2z)^2$.	0,25
	Do đó $P \ge \dfrac{9\cdot 16}{2x+y+2z+4}+\dfrac{1}{4\cdot 4}(2x+y+2z)^2$. Đặt $t=2x+y+2z,\ t\in(0;8]$ và $P \ge \dfrac{144}{t+4}+\dfrac{1}{16}t^2$.	0,25
	Xét hàm số $f(t)=\dfrac{144}{t+4}+\dfrac{1}{16}t^2, t\in(0;8]$. Ta có $f'(t)=-\dfrac{144}{(t+4)^2}+\dfrac{1}{8}t.$ Suy ra $f'(t)=0 \Leftrightarrow t(t+4)^2=8\cdot 144 \Leftrightarrow (t-8)(t^2+16t+144)=0 \Leftrightarrow t=8.$	0,25
	Vì $f'(t)<0, \forall t\in(0;8)$ nên $\min\limits_{(0;8]} f(t)=f(8)=16.$	0,25
	Do đó $P \ge 16.$ Dấu bằng xảy ra khi $t=8$ hay $x=y=2; z=1.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 16 khi $x=y=2; z=1.$	0,25

-----HẾT-----